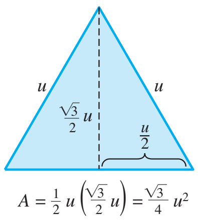


Figura 13

EJEMPLO 6 La base de un sólido es la región entre un arco de $y = \text{sen}\, x$ y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Necesitamos el resultado de que el área de un triángulo equilátero de lado u es $\sqrt{3}\,u^2/4$ (véase la figura 13). Procedemos como se muestra en la figura 14.

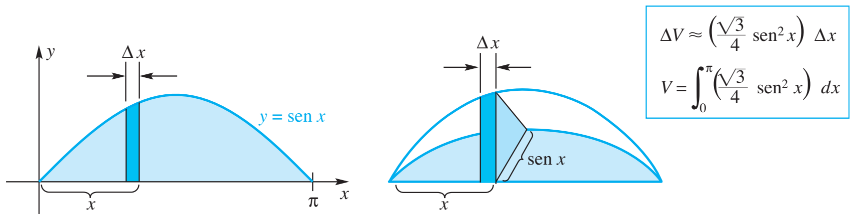


Figura 14

Para realizar la integración indicada, usamos la fórmula para el medio ángulo $\text{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\int_0^{\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x \cdot 2\,dx\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}\,2x\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0.68
\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. El volumen de un disco de radio r y grosor h es ______.

2. El volumen de una arandela con radio interno r, radio externo R y grosor h es ______.

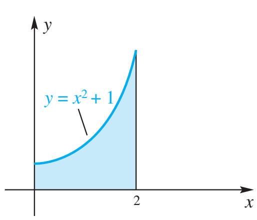
3. Si la región R, acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 3$, se hace girar en torno al eje x, el disco en x tendrá un volumen $\Delta V \approx$ ______.

4. Si la región R de la pregunta 3 se hace girar en torno a la recta $y = -2$, la arandela en x tendrá volumen $\Delta V \approx$ ______.

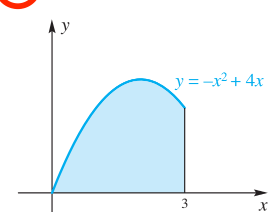
Conjunto de problemas 5.2

En los problemas del 1 al 4 encuentre el volumen del sólido generado cuando la región que se indica se hace girar alrededor del eje especificado; rebane, aproxime, integre.

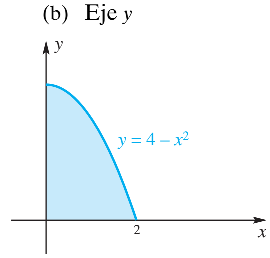
1. Eje x



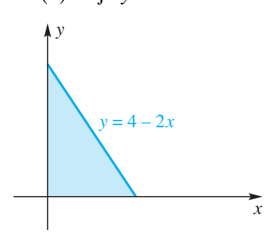
2. Eje x



3. (a) Eje x
(b) Eje y



4. (a) Eje x
(b) Eje y



≈ *En los problemas del 5 al 10 dibuje la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada vertical representativa. Después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R en torno al eje x.*

5. $y = \dfrac{x^2}{\pi}, x = 4, y = 0$

6. $y = x^3, x = 3, y = 0$

7. $y = \dfrac{1}{x}, x = 2, x = 4, y = 0$

8. $y = x^{3/2}, y = 0$, entre $x = 2$ y $x = 3$

9. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 3$

10. $y = x^{2/3}, y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 27$

≈ *En los problemas del 11 al 16 haga un dibujo de la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada horizontal representativa. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje y.*

11. $x = y^2, x = 0, y = 3$

12. $x = \dfrac{2}{y}, y = 2, y = 6, x = 0$

13. $x = 2\sqrt{y}, y = 4, x = 0$ **14.** $x = y^{2/3}, y = 27, x = 0$

15. $x = y^{3/2}, y = 9, x = 0$ **16.** $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0$

17. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje x; de esta manera, encuentre el volumen de un *esferoide alargado.* Aquí a y b son constantes positivas, con $a > b$.

18. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $y = 6x$ y la parábola $y = 6x^2$.

19. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

20. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje x y la recta $x = r - h, 0 < h < r$, calculando así el volumen de un *casquete esférico* de altura h, de una esfera de radio r.

21. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

22. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno a la recta $y = 2$, la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje y.

23. La base de un sólido es la región interior del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un cuadrado. *Sugerencia:* véanse los ejemplos 5 y 6.

24. Resuelva el problema 23 suponiendo que cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un triángulo isósceles con base en el plano xy y altura 4. *Sugerencia:* para completar la evaluación, interprete $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ como el área de un semicírculo.

25. La base de un sólido está acotada por un arco de $y = \sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

26. La base de un sólido es la región acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x^4$. Las secciones transversales del sólido, que son perpendiculares al eje x, son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

27. Encuentre el volumen de un octante (un octavo) de la región sólida común a dos cilindros circulares rectos de radio 1 cuyos ejes se intersecan en ángulos rectos. *Sugerencia:* las secciones transversales horizontales son cuadradas. Véase la figura 15.

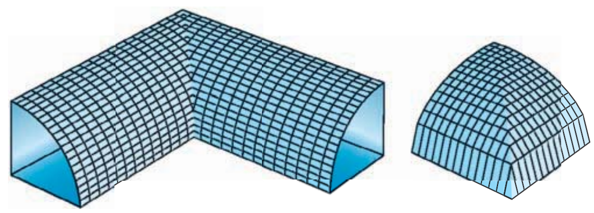


Figura 15

28. Encuentre el volumen dentro de la "cruz" que se muestra en la figura 16. Suponga que ambos cilindros tienen radio de 2 pulgadas y largo de 12 pulgadas. *Sugerencia:* el volumen es igual al volumen del primer cilindro más el volumen del segundo cilindro menos el volumen de la región común a ambos. Utilice el resultado del problema 27.

29. Encuentre el volumen interior a la "cruz" de la figura 16, suponiendo que ambos cilindros tienen radio r y largo L.

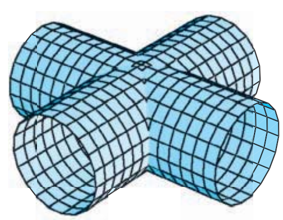


Figura 16

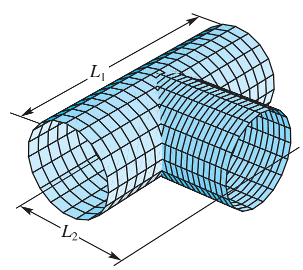


Figura 17

30. Encuentre el volumen interior de la "T" en la figura 17, suponiendo que cada cilindro tiene radio $r = 2$ pulgadas y que las longitudes son $L_1 = 12$ pulgadas y $L_2 = 8$ pulgadas.

31. Repita el problema 30 para r, L_1 y L_2 arbitrarias.

32. La base de un sólido es la región R acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de R. Encuentre el volumen del sólido.

33. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.

34. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.